

# Экзамен по курсу: "Алгебра и геометрия"

1 курс 1 семестр

Вариант номер D9123137

1. Докажите, что любая кривая второго порядка в некоторой декартовой системе координат задается одним из трех типов приведенных уравнений

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + c = 0, \quad \lambda_1 x_1^2 + c = 0, \quad \lambda_1 x_1^2 + 2\beta x_2 = 0,$$

где все коэффициенты ненулевые, кроме, возможно, величины  $c$ .

2. Система векторов  $a_1, \dots, a_n$  является базисом пространства  $V$  и  $b \in V$  — ненулевой вектор. Докажите, что найдется вектор  $a_i$ , при замене которого на  $b$  новая система также будет базисом.
3. Пусть порядок группы равен степени двойки. Докажите, что общее число элементов, которые коммутируют с заданным элементом этой группы, не может делиться на нечетное число больше единицы.
4. Пусть  $r < k \leq n$  и  $A$  — вещественная  $n \times n$ -матрица ранга  $r$ . Докажите, что для любого сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  из  $A$  можно получить матрицу ранга  $k$ , изменив каждый элемент не более чем на  $\varepsilon$ .